Densidades de espin y tensores de energía momentum no simétricos

R.Medina J. Stephany

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Universidad Simón Bolívar

Julio, 2025

Contenido

Modelos cosmológicos

Modelo standard

- Homogeneidad e isotropia del espacio
- Corrimiento al rojo
- Abundancia relativa de los elementos

- Ecuaciones de Einstein con constante cosmológica
- Métrica de Friedmann-Robertson-Walker
- El tensor fuente de las ecuaciones es simétrico (por ej. el tensor de energá momentum de un fluido ideal)

- Materia oscura
- Inflación
- Expansión acelerada

Modelos cosmológicos

Modelos alternativos

- Modelos en rotación
- Modelos alternativos de gravitacion (f(R), Torsión...)
- Materia oscura caliente

Energía y momentum

Energía y Momentum de la materia

T^{00} Densidad de Energía, T^{i0} Densidad de momentum lineal

T^{0i} Densidad de flujo de Energía, T^{ij} tensor de esfuerzos

$P^{\mu} = \frac{1}{c} \int T^{\mu 0} dV$ Energía-momentum total

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = f_{\mu} \quad , \quad \text{Ley de Newton}$$

$$T\mu\nu = pg^{\mu\nu} + (p+\rho) U^{\mu} U^{\nu} \quad \text{Fluido homogeneo e isotropico}$$

Energía y momentum

La fuente del campo gravitacional

$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ Tensor de Einstein

$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$ Ecuación dinámica

Acoplamiento Gravitacional

$I = \int [\frac{1}{8\pi G} \sqrt{g} R + \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \Phi)] d^4 x$ Acción

$\delta I = 0$ $G^{\mu\nu} = 8\pi G \Theta^{\mu\nu}$ Principio de acción

$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}$ Tensor de simétrico

En el límite plano en teoría de campos Tensor de Belifante

Momentum angular y espín

Momentum angular orbital

$$L^{\mu\nu\alpha} = x^{\mu} T^{\nu\alpha} - x^{\nu} T^{\mu\alpha} \quad , \quad L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int L^{\mu\nu 0} dV$$

Densidad de espín

$$S^{\mu\nu\alpha} = -S^{\nu\mu\alpha} \quad , \quad S^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int S^{\mu\nu 0} dV$$

Momentum angular total

$$J^{\mu\nu\alpha} = L^{\mu\nu\alpha} + S^{\mu\nu\alpha}, \quad J^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int J^{\mu\nu 0} dV$$

Conservacion del momentum angular

Ley de conservation (Sistemas aislados)

$$\partial_\alpha J^{\mu\nu\alpha} = 0 \quad , \quad \partial_\alpha S^{\mu\nu\alpha} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}$$

Ecuaciones dinámicas (Sistemas en interacción

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\mu \quad , \quad \partial_\alpha J^{\mu\nu\alpha} = x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu + \boldsymbol{\tau}^{\mu\nu} \ .$$

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Tensor cinético de energía momentum y esfuerzo

$\mu = dm/dV,$ Densidad de masa de reposo (no es escalar)

$\tilde{\mu} = dm/d\tilde{V} = \gamma^{-1}\mu$ Densidad de masa de reposo respecto al volumen propio
$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

(escalar) $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

Tensor de energía cinética y momentum cinético libres

$$\Theta^{\nu\lambda} = \tilde{\mu} u^\nu u^\lambda = \tilde{\mu}\gamma^2 v^\nu v^\lambda = \mu\gamma v^\nu v^\lambda \quad , \tag{1}$$

u^λ cuadrivelocidad $v^\lambda = \gamma^{-1} u^\lambda$.

$\Theta^{00} = \mu\gamma c^2 = \tilde{\mu}\gamma^2 c^2$ densidad de energía cinética,

$c^{-1}\Theta^{i0} = \mu\gamma v^i$ densidad de momentum cinético,

$c\Theta^{0i} = \mu\gamma c^2 v^i$ densidad de corriente de energía cinética

$\Theta^{ij}\mu\gamma v^i v^j$ tensor de densidad de corriente de momentum cinético.

$\Theta^{\nu j} = c^{-1}\Theta^{\nu 0} v^j,$ El transporte ocurre por "deriva"

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Momentum total

Momentum total en un volume $V(t)$

$$\pi^{\nu} = c^{-1} \int_{V(t)} \Theta^{\nu 0} \, dV \quad . \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, d^3x = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d^3x + \oint_{\partial V} f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad . \tag{3}$$

Ecuación dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{\nu} &= \int_{V(t)} \partial_0 \Theta^{\nu 0} \, dV + c^{-1} \oint_{\partial V} \Theta^{\nu 0} v^k \, dS_k \\ &= \int_{V(t)} \partial_0 \Theta^{\nu 0} \, dV + \oint_{\partial V} \Theta^{\nu k} \, dS_k = \int_{V(t)} \partial_{\alpha} \Theta^{\nu \alpha} \, dV \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Fuerza

En el fluido, podemos considerar las fuerzas que actúan sobre elementos de volumen (fuerzas de volumen) y las fuerzas que aparecen entre las superficies que separan dos regiones del continuo (tensión). La fuerza sobre un elemento del continuo es proporcional al volumen, $dV = dV_0 = d^3x$,

$$dK_V^\nu = \gamma dF_V^\nu = \gamma f^\nu dV = f^\nu d\tilde{V} \tag{5}$$

$f^\nu = dF_V^\nu / dV = dK_V^\nu / d\tilde{V}$ densidad de fuerza (4-vector)

f^ν es ortogonal a la velocidad $f^\nu u_\nu = 0$

$cf^0 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ densidad de potencia

(No) Simetría de $T^{\mu\nu}$

Tensor de esfuerzo

Si $d\mathbf{S}$ es un elemento de superficie que separa las regiones 1 and 2, el tensor de esfuerzo P^{ij} cumple

$$dF_S^i = P^{ij} dS_j \tag{6}$$

Introduciendo la 4-fuerza de superficie dK_S^ν y el elemento de superficie bidimensional

$$dS_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial w_1} \frac{\partial x^\tau}{\partial w_2} dw_1 \, dw_2 \ . \tag{7}$$

$$dK_S^i = P^{ij} dS_{0j} \ . \tag{8}$$

Se completa fijando $P^{00} = P^{0i} = P^{i0} = 0$ en el referencial de reposo
El tensor de esfuerzos es ortogonal a la velocidad

$$P^{\mu\nu} u_\mu = P^{\mu\nu} u_\nu = 0 \ . \tag{9}$$

En forma covariante

$$dK_S^\nu = c^{-1} P^{\nu\beta} u^\alpha dS_{\alpha\beta} \ . \tag{10}$$

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Ecuación de la Fuerza

Fuerza total

$$F^{\nu} = \int_{V(t)} f^{\nu}\, dV - \oint_{\partial V} \gamma^{-1} c^{-1} P^{\nu\beta} u^{\alpha} dS_{\alpha\beta} \quad . \tag{11}$$

La superficie bidimensional ∂V esta contenida en el espacio tridimensional. Los elementos no nulos de $dS_{\alpha\beta}$ son $dS_{0k} = dS_k$ y $dS_{k0} = -dS_{0k}$.

$$\gamma^{-1} c^{-1} P^{\nu\beta} u^{\alpha} dS_{\alpha\beta} = P^{\nu k} dS_k - c^{-1} P^{\nu 0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad . \tag{12}$$

The force becomes

$$F^{\nu} = \int_{V(t)} f^{\nu}\, dV - \oint_{\partial V} P^{\nu k}\, dS_k + c^{-1} \oint_{\partial V} P^{\nu 0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad . \tag{13}$$

$$\oint_{\partial V} P^{\nu 0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} P^{\nu 0}\, dV - \int_{V(t)} \frac{\partial P^{\nu 0}}{\partial t}\, dV \quad . \tag{14}$$

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

La fuerza total

$$\begin{aligned} F^{\nu} &= \int_{V(t)} f^{\nu}\, dV - \oint_{\partial V} P^{\nu k}\, dS_k - \int_{V(t)} \partial_0 P^{\nu 0}\, dV \\ &\quad + c^{-1}\frac{d}{dt}\int_{V(t)} P^{\nu 0}\, dV \qquad (15) \\ &= \int_{V(t)} (f^{\nu} - \partial_{\alpha} P^{\nu\alpha})\, dV + c^{-1}\frac{d}{dt}\int_{V(t)} P^{\nu 0}\, dV \quad . \qquad (16) \end{aligned}$$

El momentun lineal p^{ν}_{K} satisface la ley de Newton

$$\dot{p}^{\nu}_{\mathrm{K}} = F^{\nu} \quad . \qquad (17)$$

en cada marco de referencia, a pesar de que, dado que el volumen ocupado por el fragmento de continuo es una región diferente del espacio-tiempo para cada marco de referencia, ni F^{ν} ni $\dot{p}^{\nu}_{\mathrm{K}}$ son vectors. El momentum cinético libre π^{ν} ino es el candidato correcto para p^{ν}_{K} porque , $\dot{\pi}^{\nu}$ es la integral de volumen de un cuadrivector, como también es el caso del primer término de la fuerza pero no del segundo.

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Momento mecánico Escribimos

$$p_{\mathrm{K}}^{\nu} = \pi^{\nu} + \Delta^{\nu} \tag{18}$$

y sustituyendo

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta^{\nu} - c^{-1}\int_{V(t)} P^{\nu 0}\, dV\right) = \int_{V(t)} (f^{\nu} - \partial_{\alpha} P^{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\Theta^{\nu\alpha})\, dV \quad . \tag{19}$$

Esto se satisface para todo $V(t)$ solo si

$$\Delta^{\nu} = c^{-1}\int_{V(t)} P^{\nu 0}\, dV \tag{20}$$

y

$$\partial_{\alpha}(\Theta^{\nu\alpha} + P^{\nu\alpha}) = f^{\nu} \quad . \tag{21}$$

Momentum cinético y Tensor de esfuerzos

Esto justifica la definición del tensor cinético de energía, momentum y esfuerzo

$$T_{\mathrm{K}}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \ , \tag{22}$$

que representa la corriente del momento mecánico total y cuya divergencia es la fuerza. Se cumple

$$p_{\mathrm{K}}^{\nu} = \pi^{\nu} + \Delta^{\nu} = c^{-1}\int_V \Theta^{\nu 0} dV + c^{-1}\int_V P^{\nu 0} = c^{-1}\int_V T_{\mathrm{K}}^{\nu 0} dV \quad , \tag{23}$$

Multiplicando por u_ν

$$\partial_\alpha(\tilde{\mu} c^2 u^\alpha) = -f^\nu u_\nu - P^{\nu\alpha}\partial_\alpha u_\nu \quad . \tag{24}$$

se tiene la ecuación de calentamiento ya que $\tilde{\mu} c^2 u^\alpha$ es la densidad de corriente de energía interna $-P^{\nu\alpha}\partial_\alpha u_\nu$ es la potencia del esfuerzo que incluye potencia de compresión y potencia de viscosidad y $-f^\nu u_\nu = (f^0 c - \mathbf{v}\cdot\mathbf{f})\gamma$ potencia de la densidad de fuerza

Simetría de $T^{\mu\nu}$

§5.7. SYMMETRY OF THE STRESS-ENERGY TENSOR

All the stress-energy tensors explored above were symmetric. That they could not have been otherwise one sees as follows.

Proof that stress-energy tensor is symmetric

Calculate in a specific Lorentz frame. Consider first the momentum density (components T^{j0}) and the energy flux (components T^{0j}). They must be equal because energy = mass ("$E = Mc^2 = M$"):

$$\begin{aligned} T^{0j} &= (\text{energy flux}) \\ &= (\text{energy density}) \times (\text{mean velocity of energy flow})^j \\ &= (\text{mass density}) \times (\text{mean velocity of mass flow})^j \\ &= (\text{momentum density}) = T^{j0}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Only the stress tensor T^{jk} remains. For it, one uses the same standard argument as in Newtonian theory. Consider a very small cube, of side L, mass-energy $T^{00}L^3$,

Figura: Misner,Thorne,Wheeler

Simetría de $T^{\mu\nu}$

and moment of inertia $\sim T^{00}L^5$. With the space coordinates centered at the cube, the expression for the z-component of torque exerted on the cube by its surroundings is

$$\begin{aligned}\tau^z = {} & \underbrace{(-T^{yx}L^2)}_{\substack{\text{y-component}\\ \text{of force on}\\ \text{$+x$ face}}}\underbrace{(L/2)}_{\substack{\text{lever}\\ \text{arm to}\\ \text{$+x$ face}}} + \underbrace{(T^{yx}L^2)}_{\substack{\text{y-component}\\ \text{of force on}\\ \text{$-x$ face}}}\underbrace{(-L/2)}_{\substack{\text{lever}\\ \text{arm to}\\ \text{$-x$ face}}} \\ & - \underbrace{(-T^{xy}L^2)}_{\substack{\text{x-component}\\ \text{of force on}\\ \text{$+y$ face}}}\underbrace{(L/2)}_{\substack{\text{lever}\\ \text{arm to}\\ \text{$+y$ face}}} - \underbrace{(T^{xy}L^2)}_{\substack{\text{x-component}\\ \text{of force on}\\ \text{$-y$ face}}}\underbrace{(-L/2)}_{\substack{\text{lever}\\ \text{arm to}\\ \text{$-y$ face}}} \\ = {} & (T^{xy} - T^{yx})L^3.\end{aligned}$$

Since the torque decreases only as L^3 with decreasing L, while the moment of inertia decreases as L^5, the torque will set an arbitrarily small cube into arbitrarily great angular acceleration—which is absurd. To avoid this, the stresses distribute themselves so the torque vanishes:

$$T^{yx} = T^{xy}.$$

Put differently, if the stresses were not so distributed, the resultant infinite angular accelerations would instantaneously redistribute them back to equilibrium. This condition of torque balance, repeated for all other pairs of directions, is equivalent to symmetry of the stresses:

(No)Simetría de $T^{\mu\nu}$

Momento angular libre cinético

El Momento angular libre cinético

$$\Lambda^{\mu\nu\alpha} = x^{\mu}\Theta^{\nu\alpha} - x^{\nu}\Theta^{\mu\alpha} \quad . \tag{25}$$

Setting $\alpha = 0$ one obtains the free kinetic angular momentum density

$$\frac{d\Lambda^{\mu\nu}}{dV} = c^{-1}\Lambda^{\mu\nu 0} \quad . \tag{26}$$

Momento angular mecánico

$$\frac{dL_{\mathrm{K}}^{\mu\nu}}{dV} = c^{-1}(x^{\mu}T_{\mathrm{K}}^{\nu 0} - x^{\nu}T_{\mathrm{K}}^{\mu 0}) \quad . \tag{27}$$

$$L_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} = x^{\mu}T_{\mathrm{K}}^{\nu\alpha} - x^{\nu}T_{\mathrm{K}}^{\mu\alpha} \quad . \tag{28}$$

Ecuacion de la rotación

$$\partial_{\alpha}L_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} = x^{\mu}f^{\nu} - x^{\nu}f^{\mu} + (T_{\mathrm{K}}^{\nu\mu} - T_{\mathrm{K}}^{\mu\nu}) \quad . \tag{29}$$

La asimetría del esfuerzo actúa como un torque

(No)Simetría de $T^{\mu\nu}$

Spin

Densidad de spin

$$\frac{dS_{\mathrm{K}}^{\mu\nu}}{dV} = c^{-1} S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu 0} \quad . \tag{30}$$

Si el flujo de spin ocurre por deriva

$$S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu i} = c^{-1} S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu 0} v^{i} \quad . \tag{31}$$

Entonces

$$\frac{dS_{\mathrm{K}}^{\mu\nu}}{dt} = \int_{V(t)} \partial_{\alpha} S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} \, dV \quad . \tag{32}$$

(No)Simetría de $T^{\mu\nu}$

Momento angular total

$$J^{\mu\nu}_{\mathrm{K}} = c^{-1}\int_{V(t)} (L^{\mu\nu 0}_{\mathrm{K}} + S^{\mu\nu 0}_{\mathrm{K}})\, dV \quad . \tag{33}$$

THay un torque de la densidadd de fuerza f^i, un torque del esfuerzo aque actúa sobre la superficie y en general un torque distribuido $\tau^{\mu\nu}$.

$$\frac{dJ^{ij}_{\mathrm{K}}}{dt} = \int_{V(t)} (x^i f^j - x^j f^i)\, dV - \oint_{\partial V} (x^i P^{jk} - x^j P^{ik})\, dS_k + c^{-1}\oint_{\partial V} (x^i P^{j0} - x^j P^{i0}) v^k\, dS_k + \int_{V(t)} \tau^{ij}\, dV \ . \tag{34}$$

Usando el teorema de Gauss

$$\frac{dJ^{ij}_{\mathrm{K}}}{dt} = \int_{V(t)} [x^i(f^j - \partial_k P^{jk}) - x^j(f^i - \partial_k P^{ik})]\, dV + \int_{V(t)} (P^{ij} - P^{ji})\, dV + c^{-1}\int_{V(t)} \partial_k[(x^i P^{j0} - x^j P^{i0}) v^k]\, dV + \int_{V(t)} \tau^{ij}\, dV \ . \tag{35}$$

(No)Simetría de $T^{\mu\nu}$

Estabilidad microscópica

Sea el volúmen V una esfera de radio r, escogemos el orígen en el centro y consideramos el limite, $r \to 0$. Solo el termino de espin a la izquierda y el segundo y ulyimo término a la derecha se anulan como el volumen V. Los otros se anulan como rV. Entonces

$$\partial_\alpha S_{\mathrm{K}}^{ij\alpha} = P^{ij} - P^{ji} + \tau^{ij} = T_{\mathrm{K}}^{ij} - T_{\mathrm{K}}^{ji} + \tau^{ij} \quad . \tag{36}$$

La ecuación relativista

$$\partial_\alpha S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} = P^{\mu\nu} - P^{\nu\mu} + \tau^{\mu\nu} = T_{\mathrm{K}}^{\mu\nu} - T_{\mathrm{K}}^{\nu\mu} + \tau^{\mu\nu} \quad . \tag{37}$$

Sumando a la ecuación del momento orbital

$$\partial_\alpha J_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} = \partial_\alpha (L_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} + S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha}) = x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu \ + \tau^{\mu\nu} \ . \tag{38}$$

(No)Simetría de $T^{\mu\nu}$

Esta ecuación muestra que la simetría del tensor de tensión, frecuentemente aceptada sin mayor elaboración, solo podría ser válida para casos especiales. Si no existen densidades de espín y par, el tensor de tensión debe ser simétrico. Pero si no hay espín y sí existe densidad de par, el tensor de tensión debe ser asimétrico. La asimetría del tensor de tensión es esencial en varios fenómenos físicos bien conocidos. Por ejemplo, en el efecto giromagnético de Einstein-de Haas (Einstein-deHaas 1915, Barnett 1935), el par que hace girar a un cuerpo cuando cambia su momento magnético proviene precisamente de la asimetría de la tensión. Otro ejemplo es la absorción de radiación electromagnética polarizada circularmente, que transporta momento angular de espín (Beth 1936). Al absorberse la radiación, produce una densidad de par distribuida en el cuerpo, que se equilibra con la tensión asimétrica. El cuerpo girará si tiene libertad para hacerlo

Tensor de Belifante

Sea

$$K^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}(S_{\mathrm{K}}^{\nu\alpha\mu} + S_{\mathrm{K}}^{\mu\alpha\nu} - S_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha}) \quad , \quad K^{\mu\nu} = \partial_\alpha K^{\mu\nu\alpha} \ , \tag{39}$$

Belinfante-Rosenfeld tensor

$$T_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu} = T_{\mathrm{K}}^{\mu\nu} + K^{\mu\nu} \ . \tag{40}$$

Cumple

$$\partial_\nu T_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu} = \partial_\nu T_{\mathrm{K}}^{\mu\nu} \ . \tag{41}$$

$$T_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu} - T_{\mathrm{KB}}^{\nu\mu} = -\tau^{\mu\nu} \tag{42}$$

T_{KB} es simétrico si el torque se anula.
El momento orbital definido usando T_{KB} en vez T_{K},

$$L_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu\alpha} = x^\mu T_{\mathrm{KB}}^{\nu\alpha} - x^\nu T_{\mathrm{KB}}^{\mu\alpha} \ , \tag{43}$$

tiene la misma divergencia que $J_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha}$,

$$\partial_\alpha L_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu\alpha} = x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu + T_{\mathrm{KB}}^{\nu\mu} - T_{\mathrm{KB}}^{\mu\nu} = \partial_\alpha J_{\mathrm{K}}^{\mu\nu\alpha} \ . \tag{44}$$

Conclusion

- El tensor de energía momentum y esfuerzo de la materia no es necesariamente simétrico en presencia de spin
- El candidato natural para ser la fuente del campo gravitacional es el tensor de Belifante que es una conbinación de energía momentum y spin.